

建筑几何造型中的 Lie 群 Lie 代数方法

张群力 黄俊 程健 林涛涛

(浙江省建筑设计研究院, 杭州 310006)

【摘要】 Lie 群 Lie 代数理论在机器人机构学中有着重要应用。 E^3 中刚体的连续运动对应于 Lie 群 $SE(3)$ 上的一条连续曲线。运动旋量 $\xi \in se(3)$ 作为 Lie 群 $SE(3)$ 的 Lie 代数元素, 将刚体运动与 Lie 群 $SE(3)$ 联系起来了。根据 $se(3)$ 与 $SE(3)$ 之间的指数映射及刚体运动的叠加定理建立串联机器人正向运动指数积公式, 从而解析表达出虚拟的刚体运动。伴随刚体的空间运动, 刚体边缘曲线在 E^3 空间扫掠出了一张曲面。用计算机图形学与几何造型的方法, 获得与刚体运动相对应的, 用 *nurbs* 表达的建筑几何造型曲面。

【关键词】 Lie 群; Lie 代数; 指数映射; 刚体运动群; 刚体旋转群; 几何造型

【中图分类号】 TU113.6⁺41; TU12 **【文献标识码】** A **【文章编号】** 1674-7461(2014)01-0029-08

前言

Lie 群的理论发端于 19 世纪 70 年代挪威数学家 Sophus Lie 的工作。Lie 群是一个群, 其上有拓扑, 又是一个解析流形。它上面同时包含代数结构、拓扑结构和解析结构, 这些结构满足一些相容性条件。在 Lie 群上, 可以同时研究群结构、拓扑结构和几何结构。Lie 群是非线性的数学对象, Lie 代数是 Lie 群结构的自然的线性化。Lie 群和 Lie 代数处于代数、拓扑、几何和分析的结合点上。实际工程应用中, 研究卫星的姿态、机器人运动及计算机图形学等, Lie 群 Lie 代数理论是一个有效工具。本文将其应用于建筑造型^[1]。刚体变换群 $SE(3)$ 是 Lie 群中的一个经典范例, 与一般抽象的 Lie 群不同。它有具体的运动学和几何学意义, 能够进行直观的形象思维。同时还具有外围空间, $SE(3)$ 可以视为 12 维欧氏空间中的六维超曲面, $SO(3)$ 局部上是 9 维空间的三维超曲面。刚体运动对应于超表面上的一条曲线, 刚体的速度、加速度可以理解为沿曲线的切向量、协变导。除了采用 Lie 群 Lie 代数方法讨论外, 还可用超表面上的几何学来研究刚体运动学。在微分流形的平台上可以将几何学与运动学进行统一处理^[2]。本文中图号中标有字母 a 的图为引用图, 来自公开网络信息。其它图形是在

Rhino 平台上采用 *nurbs* 技术绘制。

1 Lie 群理论中有关的基本概念

1.1 Lie 群

设 G 为解析流形, 其上有乘法运算, 使得 G 在此乘法下成为群且乘法映射 $f: G \times G \rightarrow G, (a, b) \cdot ab$ 和逆映射 $\tau: G \times G \rightarrow G, a \cdot a^{-1}$ 都是解析映射, 则称 G 为 Lie 群。 G 作为解析流形的维数称为 Lie 群 G 的维数。

1.2 Lie 代数: (Lie 代数的概念可以脱离 Lie 群的概念而单独定义)

设 g 是基域 K 上的向量空间, 若 g 上存在双线性映射 $[\cdot, \cdot]: g \times g \rightarrow g$, 满足 (1) $[X, X] = 0, \forall X \in g$, (2) Jacobi 恒等式:

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0, \forall X, Y, Z \in g, \text{ 则称 } (g, [\cdot, \cdot]) \text{ 是域 } K \text{ 上的 Lie 代数, 称 } [\cdot, \cdot] \text{ 为 Lie 括号。} (Lie \text{ 括号反映了 Lie 群乘法不可交换性这一事实}) g \text{ 作为向量空间的维数称为 Lie 代数 } g \text{ 的维数。}$$

1.3 Lie 群 G 的 Lie 代数

$\forall a, b \in G$, 左平移映射 $L_a: G \rightarrow G, b \rightarrow ab$ 且 $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ 因此是 G 的拓扑自同胚。同样可以讨论右平移。(左右平移反映了 Lie 群乘法满足结合率这一事实) 由

于左右平移都是 G 的自同胚,所以 G 中每点处的拓扑结构都是一样的。只要关心单位元 e 邻域的拓扑即可^[3]。

记 $T_e G$ 为 Lie 群 G 单位元 e 上的切空间,任取 $X_e \in T_e G$, $(L_a)_* X_e = aX_e$ 将 X_e 左平移到点 $a \in G$ 的切空间 $T_a G$ 中,即群元素的平移诱导出切向量的平移。 $(L_a)_* X_e$ 可以看作定义在 $G \times T_e G$ 上的一个二元函数。固定 a 而令 X_e 遍历 $T_e G$,得到线性同构 $(L_a)_* : T_e G \rightarrow T_a G$,它使得 G 的任一切空间 $T_a G$ 通过平移而自然地同构于 $T_e G$ 。再固定 X_e 而令 a 遍历 G ,得到 G 上的一个切向量场 X ,它在每一个点 $a \in G$ 的取值为 $X_a = (L_a)_* X_e = aX_e$,并且 $\forall a, b \in G$,有 $(L_a)_* X_b = (L_a)_* (L_b)_* X_e = abX_e = (L_{ab})_* X_e = X_{ab}$ 。具有这种性质的切向量场 X 称为左不变向量场。令 $b = e$ 得 $X_a = (L_a)_* X_e$ 这表明左不变向量场必然是由单位元处的某个切向量经过平移生成的。 G 上的全体左不变向量场的集合(空间)记为 $\gamma_L(G)$,显然它是一个同构于 $T_e G$ 的线性空间。 $T_e G$ 的每组基恰好对应于 $\gamma_L(G)$ 的一组基,后者形成了 G 上的一个标架场。

定义:设 G 是 Lie 群, $\gamma_L(G)$ 为 G 上的所有左不变向量场构成向量空间, $\forall X, Y \in \gamma_L(G)$ 在 Lie 括号 $[X, Y] = XY - YX$ 下成为 Lie 代数,称为 Lie 群 G 的 Lie 代数。

1.4 Lie 代数到 Lie 群上的指数映射

对于任意的切向量 $A \in T_e G$,设 $\Phi_A: R \rightarrow G$ 表示左不变向量场 X_A 的积分曲线,它在 $t = 0$ 时经过 G 的单位元 e ,即满足 $\Phi_A(0) = e$ 及 $\Phi_A'(0) = A, \frac{d}{dt} \Phi_A(t) = X_A(\Phi_A(t))$ 及

$$\Phi_A(s+t) = \Phi_A(s)\Phi_A(t) \quad (1.1)$$

其中 A 表示一个 Lie 代数元素, t 为参数。因 $\Phi_A(t) \in G, \Phi_A(s) \in G$ 及 $\Phi_A(t+s) \in G$,由(1)式可知映射 $\Phi_A(t): R \rightarrow G$ 是 Lie 群同态^[2],同时也是 G 的单参数子群。在(1.1)式的等号二边同时对 s 求导并令 $s = 0$ 得 $\Phi_A'(0+t) = \Phi_A'(0)\Phi_A(t)$,

$$\text{即: } \Phi_A'(t) = A\Phi_A(t) \quad (1.2)$$

介常微分方程(1.2)得

$$\Phi_A(t) = e^{At}$$

再令 $t = 1$,得

$$\Phi_A(1) = e^A \quad (1.3)$$

将由(1.3)式定义的指数映射 $T_e G \rightarrow G, A \rightarrow e^A$ 称为从 Lie 代数 $T_e G$ 到 Lie 群 G 上的指数映射。 Lie 群的

三条基本定理,可以说明 Lie 代数乃是 Lie 群结构的局部不变量。用现代的观点表达出来就是说:由 Lie 群,唯一确定其 Lie 代数。反之,由 Lie 代数也可在单位元附近完全确定 Lie 群。但是 Lie 代数不能确定 Lie 群的整体性质。

2 刚体运动与 Lie 群

E^3 中的刚体相对于某固定坐标系的位置与姿态叫做位形,刚体全体位形的集合叫做位形空间。所有可能的刚体运动变换空间是 Lie 群的一个范例。

2.1 刚体转动与旋转群 $SO(3)$

刚体的空间转动是一类特殊的刚体运动,它只改变刚体的姿态。刚体的姿态可以用安装在刚体上的动坐标系相对于参考坐标系的相对姿态用旋转矩阵 R 来描述。旋转群又称为特殊正交群用 $SO(3)$ 表示,定义为: $SO(3) = \{R \in GL(3); R^T R = I, \det R = 1\}$ 括号内是 $SO(3)$ 的隐式方程表达。 $SO(3)$ 是以矩阵乘法作二元运算,以单位阵 I 为单位元素,以 R^T 作为 R 的逆,一般线性群 $GL(3)$ 的 3 维子群。可以证明 $SO(3)$ 是满足矩阵乘法的 Lie 群。

2.2 Lie 群 $SO(3)$ 与刚体运动的映射关系

自由刚体相对于固定坐标系旋转后的位形可由唯一的 $R \in SO(3)$ 表示。因此,刚体的姿态可用 $SO(3)$ 的参数化表示。相应的运动轨迹可表示为 $R(t) \in SO(3), t \in [0, T]$ 。Euler 欧拉定理:任意姿态 $R \in SO(3)$ 等效于绕固定轴 $\omega \in \mathbf{R}^3$ 旋转 $\theta \in [0, 2\pi)$ 角。这种旋转运动的表示法也叫做等效轴法。

2.3 Lie 群 $SO(3)$ 与它的 Lie 代数 $so(3)$

$SO(3)$ 的 Lie 代数用 $so(3)$ 表示,是由 $\mathbf{R}^{3 \times 3}$ 上的反对称矩阵的集合组成的。 $so(3) = \{\hat{\omega} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}; \hat{\omega}^T = -\hat{\omega}^{-1}\}$

其中: $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$,

$$\omega \times = \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

算子 $\wedge$ 为叉积的矩阵表达)

其 Lie 括号的构造为 $[\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2] = \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_2 \hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in so(3)$,

其中, ω 是沿欧拉转轴(瞬时转轴)的单位矢,其三个方向余弦即为

$\omega_j (j = 1, 2, 3)$, 物理意义是瞬间旋转角速度。

Lie 群 $SO(3)$ 与相关的 Lie 代数 $so(3)$ 之间的联系是矩阵指数,即由 Lie 代数求出 Lie 群元素。指数映射 $so(3) \rightarrow SO(3)$, 是 $SO(3)$ 上的满映射。即对于给定的 $R \in SO(3)$, 存在 $\omega \in \mathbf{R}^3$, $\omega = 1$ 及 $\theta \in \mathbf{R}$, 使得 $R = \exp(\hat{\omega}\theta)$ 。

其中: $\omega \in \mathbf{R}^3$ 为表示旋转方向的单位矢量, $\theta \in \mathbf{R}$ 为旋转角度。物体的每一次转动都存在某一个 $R \in SO(3)$ 与之对应, 对此可将 R 写成 ω 和 θ 的函数。

$$R(\omega, \theta) = \exp(\omega, \theta) = e^{\hat{\omega}\theta}$$

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \hat{\omega}\sin\theta + \hat{\omega}^2(1 - \cos\theta) \quad (2.1)$$

上式称为罗德里格斯 (Rodrigues) 公式。它给出了指数映射 $so(3) \rightarrow SO(3)$ 的具体解析表达式。反之, 通过矩阵对数能够由 Lie 群的元素计算出对应的 Lie 代数。

以上方法就是采用指数坐标对 $SO(3)$ 进行参数化。其它常用的参数化方法还有, 四元数法、RPY 角法和欧拉角法等, 每种方法各有优劣处。只有单位四元数能被看作旋转矩阵 $SO(3)$ 的一种整体参数化的形式, 其它方法均属于局部参数化的范畴^[4]。在拓扑学上 $SO(3)$ 与实射影空间 PR^3 之间存在微分同胚映射^[5]。

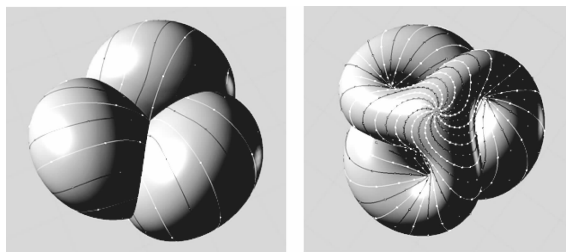


图1 实射影平面在 E^3 中的一种浸入 boys 曲面

2.4 一般刚体运动与刚体变换群 $SE(3)$

刚体变换群又称欧氏群用 $SE(3)$ 表示, 定义为: $SE(3) = \{(R, T) : R \in SO(3), T \in \mathbf{R}^3\}$

相对于刚体转动的表达而言, 描述一般的刚体运动要复杂得多。必须同时来描述刚体上任意一点的移动及刚体绕该点的转动。为此, 通常在刚体上的某点处建立直角坐标系 $\{B\}$ (物体坐标系), 通过描述该坐标系相对于参考坐标系 $\{A\}$ 的运动来描述刚体的位形。这样刚体上各点的运动情况都可以由物体坐标系 $\{B\}$ 的运动以及该点相对于物体坐标系的运动得到。具体有下面二种表达形式:

欧氏几何中仿射变换形式的表达

$$P_A = R_{AB}P_B + t_{AB} \quad (2.2)$$

和射影几何中齐次变换形式的表达

$$\begin{pmatrix} P_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{AB} & t_{AB} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_B \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

式(2.3)矩阵中的最后一行是额外增加的。但在图形学中, 其数字 1 常被标量常数代替, 当这个常数大于 1 时表示图形放大, 小于 1 时表示图形压缩。另外最后一行的 0 行矢量也可用某个其它行矢量代替, 以构成“透视变换”。这两种情况对应的矩阵变换已不再表示刚体变换^[6]。

利用齐次坐标和齐次变换矩阵可以证明 $SE(3)$ 对于矩阵乘法构成 Lie 群。

2.5 Lie 群 $SE(3)$ 与刚体运动的映射关系

刚体的任一位置可由物体坐标系相对固定坐标系的位置 $t \in \mathbf{R}^3$ 和姿态 $R \in SO(3)$ 确定。其所有位形组成的空间称为刚体的位形空间。因此, 刚体的位形空间可以表示为 $\mathbf{R}^3$ 与 $SO(3)$ 的乘积空间 (半直积), 记为 $SE(3)$ 。 $SE(3) = \{(R, T) : R \in SO(3), T \in \mathbf{R}^3\} = SO(3) \ltimes \mathbf{R}^3$

这里的半直积是指将旋转作用于平移而不是相反。刚体的位形空间中元素与 Lie 群 $SE(3)$ 中元素有着同态关系。刚体的姿态可用 $SE(3)$ 的参数化表示。Chasles 夏莱定理: 任意刚体运动均可以通过绕一轴的转动加上平行于该轴的移动实现。

这种组合运动称为旋量运动 (或螺旋运动)。旋量运动的无穷小量称为运动旋量 $\hat{\xi} \in se(3)$ 。

2.6 Lie 群 $SE(3)$ 与它的 Lie 代数 $se(3)$

以齐次形式表示的刚体变换矩阵是一个 Lie 群, 同时也是一个特殊欧氏群 $SE(3)$ 。与 Lie 群 $SE(3)$ 相关的 Lie 代数用 $se(3)$ 表示。

$SE(3)$ 的 Lie 代数: $se(3) = \{(v, \hat{\omega}) : v \in \mathbf{R}^3, \hat{\omega} \in so(3)\}$

在齐次坐标表示中, 元素 $\hat{\xi} \in se(3)$ 可写成

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$$

其 Lie 括号可表示为 $[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \in se(3)$,

$se(3)$ 中的元素称为旋量, 或者叫欧氏群的一个生成元。Lie 群 $SE(3)$ 与相关的 Lie 代数 $se(3)$ 之间的联系是矩阵指数, 通过矩阵对数能够计算出与 Lie 群的元素对应的 Lie 代数。指数映射 $se(3) \rightarrow SE(3)$, 是 $SE(3)$ 上的满映射。即对于给定的 $g \in SE(3)$, 存在 $\hat{\xi} \in se(3)$ 和 $\theta \in \mathbf{R}$, 使得

$$g = \exp(\hat{\xi}\theta) = e^{\theta\hat{\xi}}$$

$$\text{其中: } e^{\theta\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} e^{\theta\omega} & (I - e^{\theta\omega})(\omega \times v) + \theta\omega\omega^T v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega \neq 0, e^{\theta\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \omega = 0。$$

以上是指数映射 $se(3) \rightarrow SE(3)$ 的具体解析表达式。

反之,通过矩阵对数能够由 *Lie* 群的元素计算出对应的 *Lie* 代数。

3 串联机器人正向运动学的指数积(POE)公式

两个或两个以上的构件通过运动副联接而组成的系统称为运动链。组成运动链的各个构件构成首末封闭系统的运动链称为闭链;反之为开链。由开链组成的机器人称为串联机器人。串联机器人的位形空间可以用一个坐标卡复盖^[7],它是一个全局坐标,是一个特殊的微分流形;而多数并联机器人的位形空间不能用一个坐标卡复盖,因此它没有全局坐标,是一个一般的微分流形。

19 世纪初期,CHASLES 和 POINSOT 在其著作里介绍了关于旋量理论的基本原理。(运动学中的旋量与场论中的旋量是两种不同的概念)旋量有三个表征形式:对偶矢量、Plucker 坐标和 *Lie* 代数。旋量作为 *Lie* 代数的一个元素,研究早于 *Lie* 群 *Lie* 代数的出现。1983 年 BROCKT 最先将 *Lie* 群与 *Lie* 代数中的指数映射引入到机器人中来,建立了机器人的指数建模方法,通常称为指数积公式。整个系统中只有两个坐标系即可:一个是惯性坐标系 $\{S\}$,另一个是与末端执行器固联的工具坐标系 $\{T\}$ 。由于各关节的运动由与之关联的关节轴线的运动旋量产生,由此可以给出其运动学的几何描述。如果用 ξ 表示该关节轴线的单位运动旋量坐标,则沿此轴线的刚体运动可表示为

$$g_{ST}(\theta) = e^{\theta\hat{\xi}} g_{ST}(0)$$

对于一个具有 n 个关节的串联机器人正向运动学的求解,利用刚体运动的叠加原理,可得指数积公式如下:

$$g_{ST}(\theta) = e^{\theta_1\hat{\xi}_1} e^{\theta_2\hat{\xi}_2} \dots e^{\theta_i\hat{\xi}_i} \dots e^{\theta_n\hat{\xi}_n} g_{ST}(0)$$

式中 $g_{ST}(0)$ 表示工具坐标系的初始位形相对于惯性坐标系的变换矩阵, $g_{ST}(\theta)$ 表示刚体运动后工具坐标系的位形相对于惯性坐标系的变换矩阵。利用指数积公式,机器人的运动学完全可以用机器

人各个关节的运动旋量坐标表征。这里变换 $g = e^{\theta\hat{\xi}}$ 所描述的不是点在不同坐标系之间的变换,而是在同一惯性坐标系下描述刚体由起始位形到最终位形的变换。正是该公式可以不考虑中间相对的位形变换,故可以描述为一个单一的输入输出系统,为表达及控制机器人运动带来了诸多便利^[6]。

4 建筑几何造型应用

4.1 欧氏变换群应用举例

4.1.1 北京凤凰国际传媒中心

北京凤凰国际传媒中心方案竞赛是由业主单位—香港凤凰卫视邀请国内 5 家著名设计单位参加的方案招标,方案设计历时 45 天,北京市建筑设计院胡越工作室提供的设计方案在 9 个参赛方案中获得专家评审第一名。这个综合性的项目将包含电视演播,办公和商务等各种功能,曲线的壳体来自莫比乌斯带这一概念,这是一条没有开头和结尾的延续的条带,它将宏伟的中庭空间缠绕包裹。一个结构性的钢铁斜肋构架支撑着巨大的玻璃幕墙,这面透明的幕帘为室内带入充足的阳光。



图2 北京凤凰国际中心



图3 北京凤凰国际中心施工实景

对其几何造型进行刚体运动分析:

将一个刚性的椭圆型平面(该平面平行 z 轴)其形心被约束在圆周上沿圆周用角速度 φ 作旋转运动,同时该椭圆型平面又绕着其经过点的切线用角速度 φ 作旋转运动。设转动角速之比 $\varphi/\varphi = 2$, 当 $\varphi = 2\pi$ 时, $\varphi = \pi$ 。此时椭圆型平面的边缘曲线在三维空间

中扫掠出一个封闭的环面(扭环面)。设 P 为刚性椭圆上一动点的初始位置, M 为刚性椭圆圆心初始位置。经过绕 Z 轴转动以后分别到达 P' 点和 M' 点。然后 P' 点绕过 M' 点圆 R 的切矢 v 旋转, 到达 P'' 点。

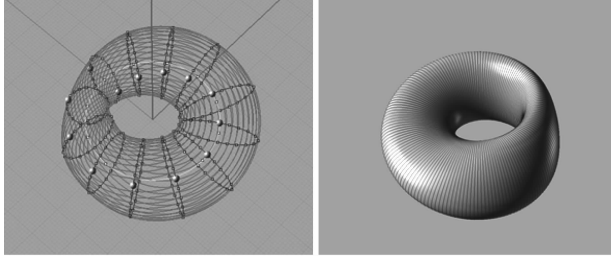


图4 北京凤凰国际中心几何造型分析动椭圆绕圆心运动伴随自转 二个角速度比为 1/2

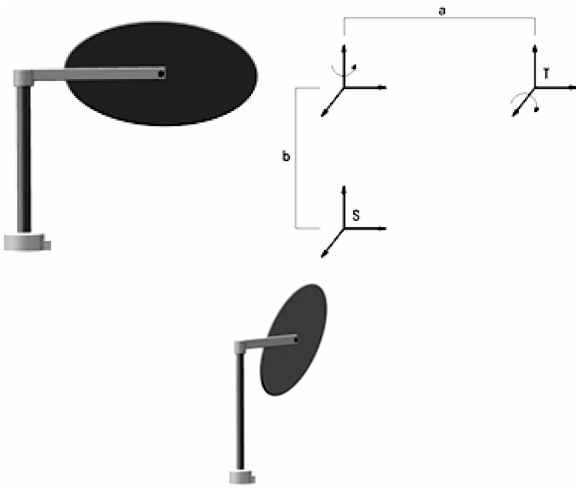


图5 动椭圆绕圆心运动伴随自转 机械臂仿真初始位形

机械臂仿真中间位形

第一步: 建立惯性坐标系 $\{S\}$ 与物体坐标系 $\{T\}$; a 和 b 的几何意义详图4。

第二步: 物体坐标系初始位形

$$g_{ST}(0) = \begin{bmatrix} I & [0 & a & b]^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第三步: 关节 1 的单位运动旋量计算如下:

$$\omega_1 = [0 \ 0 \ 1], r_1 = [0 \ 0 \ 0], v_1 = r_1 \times \omega_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\hat{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ r_1 \times \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

考虑到

$$\begin{aligned} e^{\theta_1 \hat{\xi}_1} &= I + \hat{\omega}_1 \sin \theta_1 + \hat{\omega}_1^2 (1 - \cos \theta_1) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta_1 \\ &\quad + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta_1) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\omega_1 \times v_1 = [0 \ 0 \ 1] \times [0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0]$$

$$(I - e^{\theta_1 \hat{\xi}_1}) \omega_1 \times v_1 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\omega_1 \omega_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 \omega_1^T v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0]$$

则

$$e^{\theta_1 \hat{\xi}_1} = \begin{bmatrix} e^{\theta_1 \omega_1} & (I - e^{\theta_1 \omega_1})(\omega_1 \times v_1) + \theta_1 \omega_1 \omega_1^T v_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\theta_1 \omega_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第四步: 关节 2 的单位运动旋量计算如下:

$$\omega_2 = (1 \ 0 \ 0), r_2 = (0 \ a \ b),$$

$$v_2 = r_2 \times \omega_2 = (0 \ b \ -a)$$

$$\omega_2 \times v_2 = (1 \ 0 \ 0) \times (0 \ b \ -a) = (0 \ a \ b)$$

$$\hat{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \omega_2 \\ r_2 \times \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

考虑到

$$e^{\theta_2 \hat{\omega}_2} = I + \hat{\omega}_2 \sin \theta_2 + \hat{\omega}_2^2 (1 - \cos \theta_2) =$$

$$\begin{aligned}&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta_2 \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta_2)\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}I - e^{\theta_2 \hat{\omega}_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 & 1 - \cos \theta_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$(I - e^{\theta_2 \hat{\omega}_2})(\omega_2 \times v_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 & 1 - \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a(1 - \cos \theta_2) + b \sin \theta_2 \\ -a \sin \theta_2 + b(1 - \cos \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \omega_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\theta_2 \omega_2 \omega_2^T v_2 = \theta_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则

$$e^{\theta_2 \hat{\omega}_2} = \begin{bmatrix} e^{\theta_2 \omega_2} & (I - e^{\theta_2 \omega_2})(\omega_2 \times v_2) + \theta_2 \omega_2 \omega_2^T v_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta_2 \omega_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & a(1 - \cos \theta_2) + b \sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & -a \sin \theta_2 + b(1 - \cos \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第五步:代入 POE 公式:

$$g_{ST}(\theta) = e^{\theta_1 \hat{\xi}_1} e^{\theta_2 \hat{\xi}_2} g_{ST}(0) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & a(1 - \cos \theta_2) + b \sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & -a \sin \theta_2 + b(1 - \cos \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

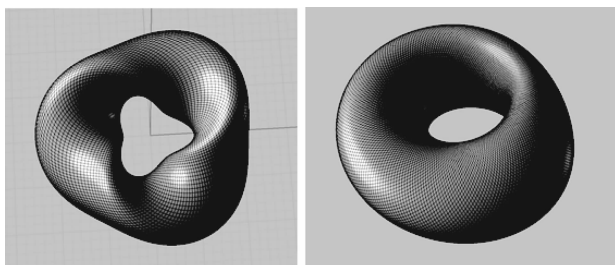


图6 动椭圆绕圆心运动伴随绕圆上经过点的切线转动
左(右)图二个角速度比为 3/2(1/2)

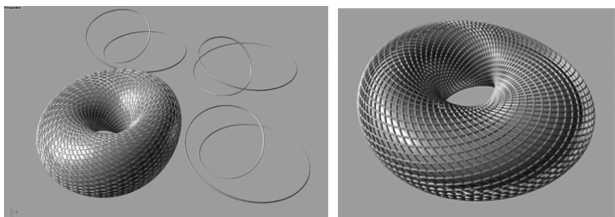


图7 莫比乌斯环面及其等距面上的纽结线网格



图8 哈萨克斯坦新国家图书馆

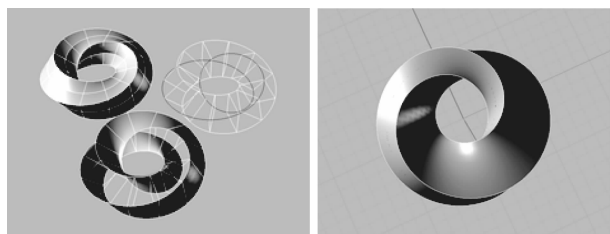


图9 几何造型分析动矩形绕圆心运动伴随自转 二个角速度比为 1/2

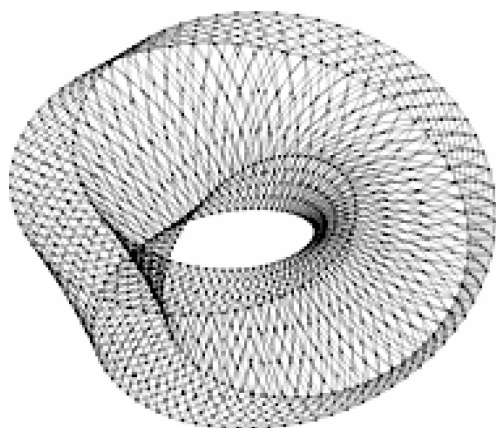


图10 结构布置网络拓扑

4.1.2 哈萨克斯坦新国家图书馆

哈萨克斯坦新国家图书馆的几何造型,可用一个刚性的矩型截面绕圆心运动并伴随自身的转动来形成^[8]。其造型效果详图(8、9、10)。

4.2 仿射变换群(一般线性群)应用

古典微分几何采用微积分为工具,研究对象主要是欧氏空间中的曲线曲面;而现代微分几何则是以微分流形为基础,即可以研究 n 维欧氏空间的曲线曲面,也可以研究非欧氏空间中的几何。按照 F. Klein 的观点,几何学就是研究在变换群作用下的不变量和不变性质的学问,而几何中的变换群通常都是 Lie 群^[1]。比如,若在 R^m 上选取等距变换群,则有欧氏几何;若选取仿射变换群,则有仿射几何;若将 R^m 扩充为射影空间,选取射影变换群,则有射影几何。由此足以看出 Lie 群在几何学研究中的主导作用。由高斯内蕴几何发展起来的黎曼几何与 Lie 群已成为现代微分几何的两大基石。图 11 中的几何造型已不属于欧氏几何造型的范畴:让动椭圆 A 形心固定在定椭圆 B 上, A 所在的平面与 B 所在的平面垂直。动椭圆 A 沿椭圆 B 运动的同时绕着经过点定椭圆 B 的切线旋转,伴随动椭圆 A 自身的等

距缩放。

4.3 扭环面上的纽结线与扭环面的等距面

在图 2、3、7 中所看到的斜网格是扭环面上的纽结线网格^[9],在本文方法建立的数字模型上很容易实现纽结线网络的建立与调整。圆环面、扭环面上的纽结线本身具有优美的空间几何结构,利用其作为基线还可以做出其它的几何造型。详图 15、图 16。在图 7、11 中可以看到一个双层的几何结构,其中里面的曲面就是扭环面,而外面的一层则是扭环面等距面上的纽结线网格。只需在刚体的初始位形上确定一个椭圆及该椭圆的等距线,通过刚体特定的空间运动,这两条曲线在空间中就扫掠出扭环面与扭环面的等距面。工程中可利用等距面可进行幕墙布置及定义杆件截面。

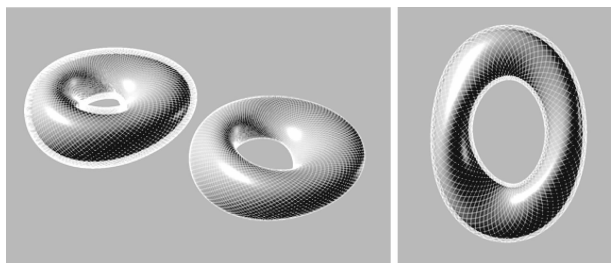


图11 动椭圆绕定椭圆伴随动椭圆的自转与等距缩放,外面是等距面上的纽结线网

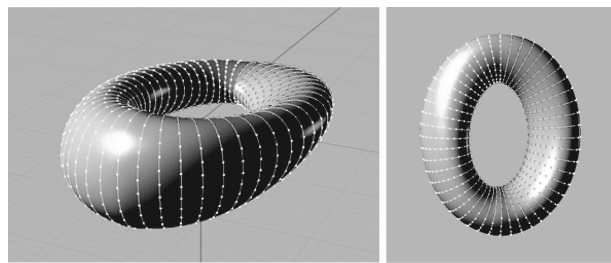


图12 动椭圆沿定椭圆运动伴随动椭圆自转,表面为离散的运动点群

5 结论

用 Lie 群 Lie 代数方法描述刚体的连续运动。通过指数坐标对 Lie 群 $SE(3)$ 进行参数化,得到物体(动)坐标系相对于惯性(定)坐标系的连续变化的解析表达。在初始位形刚性截面的边缘曲线上任取一点 P ,通过上述解析表达得到该点随刚体运动扫掠出的一条空间曲线 L 。当 P 点遍历整条边缘曲线就得到一张扫掠曲面(建筑造型曲面)。对于



图 13 三亚凤凰岛建筑方案



图 14 湖州喜来登大酒店建筑方案

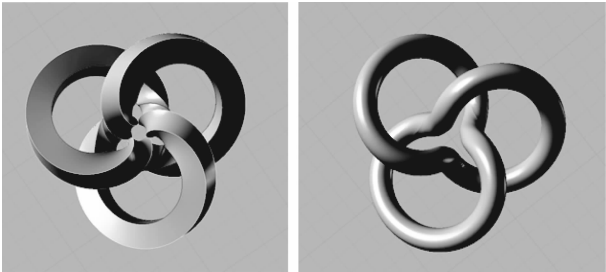


图 15 圆环面纽结线几何造型 1

本文中的几个例子,可按一般情况即动椭圆绕定椭圆编写程序,而将动椭圆绕定圆作为其特例处理。*Lie* 群是连续群,但计算机只能处理离散数据,将边缘曲线离散为 n 个控制点,这 n 个控制点随刚体运

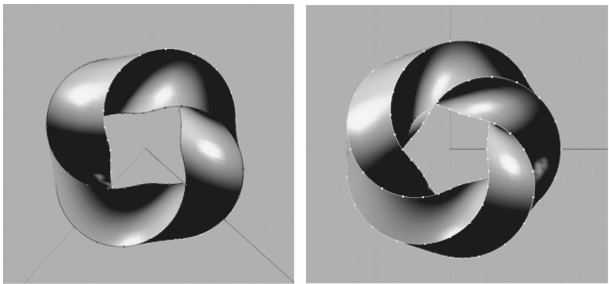


图 16 圆环面纽结线几何造型 2

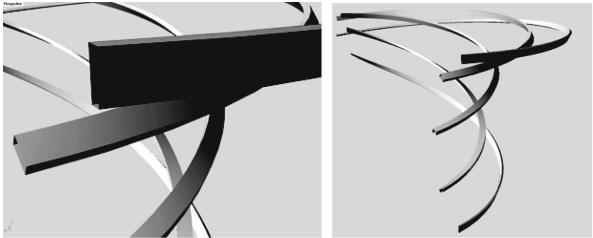


图 17 利用扭环面的等距面可在纽结线上布置矩形截面的杆件

动后形成 n 条空间曲线,在它们上面离散出一个运动点群,采用 *nurbs* 技术得到一张 *nurbs* 曲面。该 *nurbs* 曲面实际对应了 *Lie* 群 $SE(3)$ 上的一条 *nurbs* 曲线。*Lie* 群 *Lie* 代数方法不仅可应用于建筑几何造型,还可以应用于结构构件的运动学、动力学建模^[10~11]。因此值得对 *Lie* 群 *Lie* 代数方法的工程应用作进一步的研究。

参考文献

[1] 赵旭安. 李群和李代数 [M]. 北京师范大学出版集团. 2012. 9

[2] 丁汉,朱利民. 复杂曲面数字化制造的几何学理论和方法 [M]. 北京:科学出版社,2011.

[3] 项武义,候自新,孟道骥. 李群讲义 [M]. 北京大学出版社. 1992. 6

[4] 胡茂林. 空间和变换 [M]. 科学出版社. 2007. 6

[5] Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu 著 (译者:王丽瑾 刘学深). 力学和对称性导论 [M]. 清华大学出版. 2006. 8

[6] (美)理查德·摩雷, (中)李泽湘, (美)夏恩卡·萨思特里 著 (译者:徐卫良,钱瑞明). 机器人操作的数学导论 [M]. 机械工业出版社. 1989. 6

[7] 于靖军,刘辛军,丁希伦,戴建生. 机器人机构学的数学基础 [M]. 机械工业出版社. 2009. 4

[8] 黄俊,张群力,程健,冯武强. 莫比乌斯环面上的建筑结构数字建模 [M]. 杭州:浙江建筑 2013. 7